عباس قلعه پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

یک رابطهٔ طـــولی زیبا در دایره!

اشاره

دایرهٔ محیطی n ضلعی منتظم $A_1A_2...A_n$ و نقطهٔ M واقع بر محیط این دایره را در نظر می‌گیریم. هدف از این مقاله اثبات این مطلب است که مجموع مجذورهای فاصله‌های نقطهٔ M از رأس‌های n ضلعی، بستگی به موقعیت نقطهٔ M ندارد و اگر شعاع دایره R را فرض کنیم، این مجموع برابر است با: $2nR^2$. در آغاز، دو حکم را که برای رسیدن به این هدف مورد نیاز هستند، بیان و اثبات می‌کنیم.

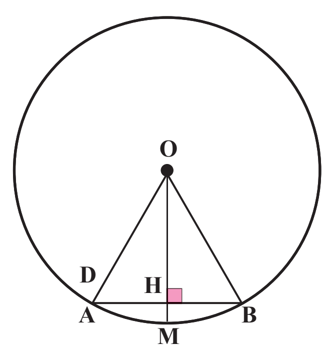
۱. طول وتر AB از دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $2R\sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

اثبات: نیم‌ساز زاویهٔ مرکزی AOB را رسم می‌کنیم تا وتر و کمان AB را به‌ترتیب در نقاط H و M قطع کند. چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است، پس OH بر AB عمود است و چون شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند، پس:

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB},\ AH=BH=\frac{AB}{2}$$

در نتیجه:

$$\angle AOH=\angle BOH=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH داریم:

$$\sin\angle BOH=\frac{BH}{OB}\Rightarrow \sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow AB=2R\sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

۲. حکم دیگر اثبات درستی تساوی زیر برای هر عدد طبیعی n است:

$$\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+2\alpha)+...+\cos(\theta+n\alpha)$$
$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos(\theta+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

اثبات: عبارت سمت چپ تساوی حکم را در $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\text{سمت چپ}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+\alpha)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+2\alpha)+...+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+n\alpha)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

حال به‌کمک دستور $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ داریم:

$$\text{صورت کسر}=[\sin(\frac{\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)]+[\sin(\frac{3\alpha}{2}+\theta)+\sin(-\frac{\alpha}{2}-\theta)]$$
$$+[\sin(\frac{5\alpha}{2}+\theta)+\sin(-\frac{3\alpha}{2}-\theta)]+...+[\sin(\frac{2n+1}{2}\alpha+\theta)$$
$$+\sin(\frac{1-2n}{2}\alpha-\theta)]$$

و بــا توجه به اینکــه sin(−x)=−sinx، با حذف جملات قرینه در صورت کسر خواهیم داشت:

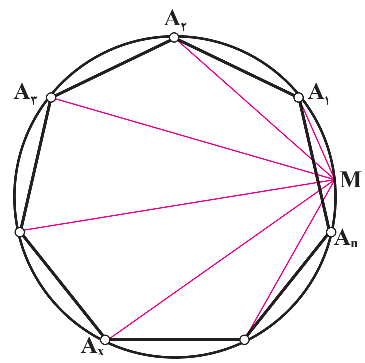
$$=\frac{\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)+\sin(\frac{2n+1}{2}\alpha+\theta)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

و بـه کمک دسـتور $\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$=\frac{۲\sin(\frac{n+۱}{۲})\alpha\cos(\theta+\frac{n\alpha}{۲})}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

پس حکم دوم نیز به اثبات رسید. حال به سراغ مسئلهٔ اصلی می‌رویم. در شکل ۲، $A_۱A_۲...A_n$ nضلعی منتظم و دایرهٔ محیط بر آن مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی پیرامون دایره، نقطه‌ای از کمان $A_۱A_n$ می‌گیریم. M را به رأس‌های nضلعی وصل می‌کنیم. خواستهٔ مسئله در واقع محاسبهٔ مجموع زیر است:

$$MA_۱^۲+MA_۲^۲+...+MA_n^۲$$



کـه $MA_۱$، $MA_۲$، ... و MA_n وترهایی از دایره هستند. حال فرض کنیم اندازهٔ کمان $MA_۱$ برابر α باشد. آن وقت چون: $\widehat{A_۱A_۲}=\widehat{A_۲A_۳}=...=\widehat{A_{n-۱}A_n}=\frac{۲\pi}{n}$، پس کمان‌های $MA_۲$، $MA_۳$، ... و MA_n به ترتیب برابرند با:

$$\alpha+\frac{۲\pi}{n},\alpha+\frac{۴\pi}{n},...,\alpha+\frac{۲(n-۱)\pi}{n}$$

با توجه به حکم شمارهٔ یک، اندازهٔ وترهای $MA_۱$، $MA_۲$، ... و MA_n به‌صورت زیر خواهد بود:

$$MA_۱=۲R\sin\frac{\alpha}{۲}$$

$$MA_۲=۲R\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{\pi}{n})$$

$$MA_۳=۲R\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{۲\pi}{n})$$

$$\vdots$$

$$MA_n=۲R\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{(n-۱)\pi}{n})$$

پس خواهیم داشت:

$$MA_۱^۲+MA_۲^۲+MA_۳^۲+...+MA_n^۲$$
$$=۴R^۲[\sin^۲\frac{\alpha}{۲}+\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}+\frac{\pi}{n})+\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}+\frac{۲\pi}{n})$$
$$+...+\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}+\frac{(n-۱)\pi}{n})]$$

اکنون به محاسبهٔ مجموع داخل کروشه می‌پردازیم. اگر این مجموع را S بگیریم و از دستور $\sin^۲(x)=\frac{۱-\cos۲x}{۲}$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱-\cos\alpha}{۲}+\frac{۱-\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{n})}{۲}+\frac{۱-\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{n})}{۲}$$
$$+...+\frac{۱-\cos(\alpha+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})}{۲}$$
$$=\frac{n}{۲}-[\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{n})+\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{n})+...+\cos(\alpha+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})]$$

حال اگر در حکم شمارهٔ دو فرض کنیم: θ=α و $\alpha=\frac{۲\pi}{n}$، مقدار داخل کروشه در عبارت اخیر برابر خواهد بود با:

$$\frac{\sin\frac{n(۲\pi)}{۲n}\cos(\alpha+\frac{(n-۱)۲\pi}{۲n})}{\sin\frac{۲\pi}{۲n}}$$

و چون: $\sin\pi=۰$، پس برابر صفر است. لذا: $S=\frac{n}{۲}$ و داریم:

$$MA_۱^۲+MA_۲^۲+...+MA_n^۲=۴R^۲(\frac{n}{۲})=۲nR^۲$$

که مستقل از موقعیت M روی دایره است.

تمرین

۱. درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta+۲\alpha)+...+\sin(\theta+n\alpha)$$
$$=\frac{\sin\frac{(n+۱)\alpha}{۲}+\sin(\theta+\frac{n\alpha}{۲})}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

۲. شعاع دایرهٔ محیطی nضلعی منتظم $A_۱A_۲...A_n$ را R می‌گیریم. ثابت کنید مجموع مجذورهای همهٔ ضلع‌ها و مجموع مجذورهای همهٔ قطرهای این nضلعی منتظم برابر است با: $n^۲R^۲$.

راهنمایی: با توجه به متن مقاله، نقطهٔ M را روی رأس $A_۱$ فرض کنید.

***منبع**

رکسی، شکلیا و یاگلوم، ایساک موسو ویچ (۱۳۶۶). **گزیده‌ای از مهم‌ترین مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی**. ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار. تهران. چاپ اول.